*Lycée Kléber* *PC * année 2016-2017*

# COLLE 10 DU 14 MARS 2017 AU 27 MARS 2017

Révisions : toute l'année :

1. Compléments d'algèbre linéaire
2. Séries numériques
3. Réduction des endomorphismes
4. Intégrales généralisées
5. Espaces vectoriels normés
6. Suites et séries de fonctions
7. Séries entières
8. Espaces probabilisés
9. Variables aléatoires discrètes
10. Espaces euclidiens et préhilbertien
11. Fonctions à valeurs vectorielles
12. Equations différentielles

Programme officiel pour les deux derniers chapitres :

## 0.1 Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

*L'objectif de ce chapitre est double :*

— *généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique, en vue notamment de préparer le chapitre sur les équations différentielles ;*

— *formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.*

*Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

| CONTENUS | CAPACIT?S & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables** | |
| Dérivabilité en un point.<br>Dérivabilité sur un intervalle. | Taux d'accroissement et développement limité d'ordre un.<br>Interprétations géométrique et cinématique.<br>⇆ PC : vecteur vitesse. |
| Combinaison linéaire de fonctions dérivables.<br>Dérivée de $L\circ f$, $B(f,g)$, $f\circ\varphi$ où $f$ et $g$ sont dérivables et à valeurs vectorielles, L est linéaire, B est bilinéaire, $\varphi$ est dérivable et à valeurs réelles. | Application au produit scalaire et au déterminant dans une base de $\mathbb{R}^2$ de deux fonctions vectorielles. |
| **b) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$** | |
| Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle.<br>Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$. | ⇆ PC : vecteur accélération.<br>Brève extension des résultats du paragraphe précédent. |
| **c) Arcs paramétrés** | |
| Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$, avec $k\in\mathbb{N}^*$.<br>Point régulier, tangente en un point régulier.<br>Construction d'arcs plans. | L'étude des points stationnaires, des asymptotes et des arcs définis en coordonnées polaires est hors programme.<br>⇆ I : visualisation à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel. |

## 0.2 Équations différentielles linéaires

*L'étude des équations différentielles linéaires scalaires d'ordres un et deux, abordée en première année, se poursuit par celle des systèmes différentiels linéaires d'ordre* 1 *et des équations scalaires à coefficients non constants, en mettant l'accent sur les équations d'ordre deux. On s'attache à développer à la fois les aspects théorique et pratique :*

— *la forme des solutions ;*
— *le théorème de Cauchy linéaire ;*
— *le lien entre les équations scalaires et les systèmes différentiels d'ordre un ;*
— *la résolution explicite.*

*Ce chapitre favorise les interactions avec les autres disciplines scientifiques.*

*Dans tout ce chapitre,* $\mathbb{K}$ *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.

| CONTENUS | CAPACIT?S & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Systèmes différentiels** | |
| Équation de la forme $X' = A(t)X+B(t)$ où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont continues. | |
| Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. | |
| Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. | Démonstration hors programme.<br>$\leftrightarrows$ I : Méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée d'un problème de Cauchy. |
| Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et l'espace vectoriel des solutions de $X' = A(t)X$. | Dimension de l'espace vectoriel des solutions. |
| Système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. | |
| Résolution lorsque A est une matrice diagonalisable. | Exemples de résolution dans le cas où A est trigonalisable.<br>$\leftrightarrows$ PC : comportement asymptotique des solutions en fonction du spectre de A. |
| **b) Équations différentielles linéaires scalaires** | |
| Équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients continus $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. | Les étudiants doivent savoir écrire cette équation sous la forme d'un système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$. |
| Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. | La recherche d'une solution particulière de l'équation complète doit comporter des indications. |
| Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. | |
| Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène, dimension. | Exemples d'utilisation de développements en série entière pour la recherche de solutions. |
| Cas des équations à coefficients constants. | On relie les résultats obtenus en première année à l'aide de l'équation caractéristique à la réduction de la matrice du système différentiel associé.<br>Les étudiants doivent savoir trouver une solution particulière de l'équation complète pour un second membre de la forme $A\cos(\omega t)$ ou $A\sin(\omega t)$.<br>La méthode de la variation des constantes est hors programme. |