Lycée Kléber	*PC * année 2016-2017*

COLLE 09 DU 27 FÉVRIER 2017 AU 12 MARS 2017

0.1 Espaces euclidiens

Ce chapitre est organisé autour de trois objectifs :

- *consolider les acquis de la classe de première année sur les espaces euclidiens ;*
- *étudier les isométries vectorielles et les matrices orthogonales, et les classifier en dimension deux en insistant sur les représentations géométriques ;*
- *énoncer les formes géométrique et matricielle du théorème spectral.*

CONTENUS	CAPACIT?S & COMMENTAIRES
a) Isométries vectorielles	
Un endomorphisme d'un espace euclidien E est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme.	Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Exemple des réflexions en dimensions deux et trois.
Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale.	
Groupe orthogonal.	Notation O(E).
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
b) Matrices orthogonales	
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui lui est canoniquement associé est une isométrie vectorielle.	Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormale.
Caractérisation par l'une des relations $MM^T = I_n$ ou $M^TM = I_n$.	Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de sa matrice dans une base orthonormale.	
Groupe orthogonal d'ordre n.	Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal.	Notations $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$.
Orientation d'un espace euclidien.	
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien	
Détermination des matrices de $O_2(\mathbb{R})$, de $SO_2(\mathbb{R})$.	Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$.
Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté.	Écriture complexe d'une rotation.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Réduction des endomorphismes symétriques et des matrices symétriques réelles	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.	
Théorème spectral : un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.	Démonstration non exigible.
Interprétation matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe D diagonale réelle et P orthogonale telles que $A = PDP^{-1}$.	

1. Les démonstrations des différents résultats du cours seront parfaitement maîtrisés.
2. Les étudiants sauront reconnaître des projecteurs orthogonaux et des symétries orthogonales, ainsi que en dimension 2 des rotations et des réflexions.
3. Ils sauront utiliser les projections orthogonales dans des problèmes de meilleur approximation.
4. Ils sauront aussi redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'appliquer à la mise en place d'inégalités.