COLLE 08 DU 30 JANVIER 2017 AU 12 FÉVRIER 2017

0.0.1 B - Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette partie sont les suivants :
- *étendre la notion de variable aléatoire finie à des variables dont l'image est un ensemble dénombrable ;*
- *fournir des outils permettant, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret ;*
- *exposer deux résultats asymptotiques : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi faible des grands nombres ;*
- *introduire les fonctions génératrices et utiliser les propriétés des séries entières.*

La construction d'espaces probabilisés modélisant une suite d'expériences aléatoires est hors programme, on admet l'existence de tels espaces. Les différents types de convergence probabiliste (presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne) sont hors programme.

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathscr{A}$.	Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement.
Notations $(X \in U)$, $\{X \in U\}$.	
Loi d'une variable aléatoire discrète.	
Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Croissance, limites en $-\infty$ et en $+\infty$.	$F_X(x) = P(X \leqslant x)$. L'étude des propriétés de continuité des fonctions de répartition n'est pas au programme.
Si X prend ses valeurs dans $\{ x_n \ ; \ n \geqslant 0 \}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que $P(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	Démonstration hors programme.
Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe et lois marginales	Extension aux variables discrètes des notions étudiées en première année sur les variables finies.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.	
Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dites indépendantes si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$	Démonstration hors programme.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Variables mutuellement indépendantes.	Extension sans démonstration aux variables discrètes des notions et des résultats vus en première année.
Suite de variables aléatoires indépendantes (deux à deux ou mutuellement).	La démonstration de l'existence d'un espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de lois discrètes donnés est hors programme. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.
b) Espérance et variance	
La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n \ ; \ n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté E(X), le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. ⇆ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\Sigma P(X=x_n)\,f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$E(f(X))=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=x_n)\,f(x_n).$$	Démonstration hors programme.
Linéarité de l'espérance.	Démonstration non exigible.
Positivité, croissance de l'espérance.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $E(XY)=E(X)E(Y)$.	Démonstration hors programme.
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.	
Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=E(X^2)-E(X)^2$.	
Écart type $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.	
Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, égalité $V(aX+b)=a^2V(X)$.	
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.	Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.
Variance d'une somme finie de variables aléatoires ; cas de variables deux à deux indépendantes.	
Covariance, coefficient de corrélation.	Notations : $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et $\rho(X,Y)$.
Encadrement $-1\leqslant\rho(X,Y)\leqslant 1$.	Inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t)=E(t^X)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n.$$	La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.
Le rayon de convergence est au moins égal à 1.	
La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $E(X)=G_X'(1)$.	Démonstration non exigible.
La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Démonstration non exigible. Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $V(X)$ en fonction de $G_X'(1)$ et de $G_X''(1)$ en cas d'existence.
Série génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.	

d) Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad P(X=k)=p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Série génératrice, espérance et variance.	
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X>n+k\,|\,X>n)=P(X>k).$$	
Loi de Poisson de paramètre λ. Série génératrice, espérance et variance.	Notation $X\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$.
Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson.	⇆ PC : compteur Geiger.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
e) Résultats asymptotiques	
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares. ⇆ I : simulation de cette approximation. La notion de convergence en loi est hors programme.
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$	Estimation : pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$ ⇆ I : simulation d'une suite de tirages.

1. Les démonstrations des différents résultats du cours seront parfaitement maîtrisées.
2. Les étudiants sauront faire bon usage des différentes lois usuelles
3. Le chapitre sur les espaces probabilisables est naturellement à revoir.
4. Il sera tout à fait opportun de revoir aussi le chapitre sur les séries numériques et le chapitre sur les séries entières.
5. Les techniques de résolution des récurrences linéaires seront aussi reprises.