Lycée Kléber	*PC * année 2016-2017*

COLLE 07 DU 16 JANVIER 2017 AU 29 JANVIER 2017

0.0.1 A- Espaces probabilisés

Cette partie a pour objectif la mise en place du cadre général de la théorie des probabilités permettant d'aborder l'étude de processus stochastiques à temps discret. Cette mise en place se veut minimale. En particulier :

— *la notion de tribu ne doit donner lieu à aucun développement théorique autre que sa définition ;*

— *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.*

CONTENUS	CAPACIT?S & COMMENTAIRES
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensembles finis ou dénombrables. Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n\,;\ n\in\mathbb{N}\}$. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.
b) Espace probabilisé	
Si Ω est un ensemble, on appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathscr{A}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que : 1. $\Omega\in\mathscr{A}$, 2. pour tout $A\in\mathscr{A}$, $\overline{A}=\Omega\setminus A\in\mathscr{A}$, 3. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, la réunion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathscr{A}$. Si Ω est un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega,\mathscr{A})$ une application $P:\mathscr{A}\to[0,1]$ telle que : 1. $P(\Omega)=1$, 2. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$. On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega,\mathscr{A},P)$ où $\mathscr{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$. Propriétés : — $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\in\mathscr{A}$. — Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n\subset A_{n+1}$, alors : $\lim_{n\to+\infty} P(A_n)=P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$. — Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1}\subset A_n$, alors : $\lim_{n\to+\infty} P(A_n)=P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$. — Sous additivité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathscr{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Conditionnement et indépendance	
Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$	Notation $P_B(A) = P(A \mid B)$. L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Ce paragraphe étend rapidement les concepts et résultats vus en première année dans le cadre des univers finis.
Formule des probabilités composées. Système complet dénombrable d'événements. Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \mid A_n)\, P(A_n)$$	On adopte la convention $P(B \mid A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$. La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
Formule de Bayes. Indépendance de deux événements. Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A \mid B) = P(A)$. L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

1. Les démonstrations des différentes formules du cours seront parfaitement maîtrisées.
2. Les étudiants savent modéliser l'expérience aléatoire consistant à jeter une infinité de fois un dé ou une pièce de monnaie.
3. Ils réviseront opportunément la résolution des récurrences linéaires d'ordres 1, 2 et plus.