Lycée Kléber *PC * année 2016-2017*

Colle 06 du 3 janvier 2017 au 15 janvier 2017

0.0.1 C - Séries entières

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

— *étudier la convergence d'une série entière de variable complexe et mettre en évidence la notion de rayon de convergence ;*

— *étudier les propriétés de sa somme en se limitant à la continuité dans le cas d'une variable complexe ;*

— *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

La théorie des séries entières sera appliquée au cas des séries génératrices dans le chapitre dédié aux variables aléatoires discrètes et à la recherche de solutions d'équations différentielles linéaires.

Contenus	Capacit?s & commentaires
a) Rayon de convergence	
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels positifs ρ tels que la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée.	Pour $\lvert z\rvert < \mathrm{R}$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.	
Si R_a est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_b celui de $\sum b_n z^n$, alors : si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$; si $\lvert a_n\rvert \sim \lvert b_n\rvert$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.	
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	
Utilisation de la règle de d'Alembert.	
Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Régularité de la somme	
Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.	
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.	On admet la continuité de la somme d'une série entière d'une variable complexe sur le disque ouvert de convergence. L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ou du disque de convergence n'est pas un objectif du programme.
Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.	
Caractère $\mathscr{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.	
c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle	
Fonction développable en série entière.	
Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Unicité du développement en série entière. Développements des fonctions usuelles.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$. Les étudiants doivent savoir utiliser une équation différentielle linéaire pour développer une fonction en série entière.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.

1. Les développements en séries entières des fonctions usuelles seront connus et les élèves sauront les retrouver.
2. Les étudiants sauront utiliser une équation différentielle ou une équation fonctionnelle pour calculer un DSE.
3. Ils sauront aussi utiliser les séries entières pour calculer la somme d'une série.
4. Les liens entre séries numériques, séries de fonctions et séries entières devront être parfaitement établis.
5. Le cours devra être parfaitement maîtrisé.