Lycée Kléber *PC * année 2016-2017*

COLLE 04 DU 21 NOVEMBRE 2016 AU 4 DÉCEMBRE 2016

0.1 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Ce chapitre vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *préparer l'introduction de la norme de la convergence uniforme, afin de fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

L'aspect géométrique de certains concepts topologiques gagne à être illustré par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACIT?S & COMMENTAIRES
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe ; espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire. Distance associée à une norme. Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Parties convexes. Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées.	Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$. Convexité des boules.
b) Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
Convergence d'une suite. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente. La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme. L'étude de la convergence d'une suite se ramène à celle de ses coordonnées dans une base.	Exemples de suites de matrices. Résultat admis, qui pourra être illustré sur les normes usuelles définies sur $\mathbb{K}^p$.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie	
L'étude topologique d'un espace vectoriel normé de dimension finie se ramène à celle de $\mathbb{K}^p$ muni d'une norme. Point intérieur à une partie. Partie ouverte. Point adhérent à une partie. Partie fermée. Intérieur, adhérence, frontière.	Résultat admis. Une boule ouverte est un ouvert. Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère sont des fermés. Seules les définitions sont au programme. Ces notions sont illustrées par des figures.
e) Limite et continuité en un point	
Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition. Caractérisation séquentielle. Équivalence entre l'existence d'une limite et celle des limites des coordonnées de la fonction dans une base de l'espace d'arrivée. Opérations algébriques sur les limites, composition. Continuité en un point. Lien avec la continuité des composantes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Caractérisation séquentielle.	
f) Continuité sur une partie	
Opérations algébriques, composition.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes.	Démonstration non exigible.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	
Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.	La notion de norme subordonnée est hors programme.
Continuité des applications multilinéaires et polynomiales sur $\mathbb{K}^n$.	Exemple du déterminant.

Les étudiants profiteront de ce chapitre pour très opportunément réviser :

1. La notion de borne supérieure ;
2. L'axiome de la borne supérieure ;
3. Le théorème de caractérisation de la borne supérieure et sa traduction en terme de point adhérent ;
4. Le chapitre de sup sur les limites de suites et de fonctions.