Lycée Kléber *PC * année 2016-2017*

Colle 03 du 7 novembre 2016 au 20 novembre 2016

Intégrales sur un intervalle

0.1 Intégration

L'objectif de ce chapitre est multiple :

— *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*

— *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*

— *compléter le chapitre dédié aux suites et aux séries de fonctions par le théorème de la convergence dominée et le théorème d'intégration terme à terme ;*

— *étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Contenus	Capacit?s & commentaires
a) Fonctions continues par morceaux	
Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle.	
Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.	Brève extension des propriétés étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
b) Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$	
Si f est une application à valeurs complexes continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.	Intégrale divergente.
Si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.	
c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	
Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Intégrales de référence : $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$, $\int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$.	Les étudiants doivent connaître la nature de $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ selon le signe de α.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Changement de variable : si $\varphi : \,]\alpha,\beta[\, \to \,]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si $f : \,]a,b[\, \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux alors $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et, si tel est le cas, elles sont égales.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégrale absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence et dans ce cas la valeur absolue (ou le module) de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue (ou du module).	Pour une fonction à valeurs réelles, on utilise ses parties positive et négative.
Une fonction continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.	Notations $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{d}t, \int_{\mathrm{I}} f$.
Pour f et g fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: — si $\lvert f\rvert \leqslant \lvert g\rvert$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. — si $f(x) \underset{x\to\infty}{=} \mathrm{O}\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a,+\infty[$. — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f est équivalente à celle de g sur $[a,+\infty[$.	Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
Si f est continue et intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_{\mathrm{I}} \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t = 0$ implique $f = 0$. Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.	
Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I. Le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable. Inégalité de Cauchy-Schwarz.	Produit scalaire de deux fonctions continues de carré intégrable sur I à valeurs réelles.

f) Intégrales à paramètre

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de continuité : Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$, telle que : — pour tout $x\in\mathrm{I}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J ; — pour tout $t\in\mathrm{J}$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur I ; — il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}$, on ait $\lvert f(x,t)\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $x\mapsto \displaystyle\int_{\mathrm{J}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.	Démonstration non exigible. Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de dérivation : Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$, telle que : — Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ; — Pour tout $t \in \mathrm{J}$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ; — Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ; — Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$, on ait $\left\lvert \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_{\mathrm{J}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a sur I : $$g'(x) = \int_{\mathrm{J}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration non exigible. Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I. ⇆ PC : transformée de Fourier.
Extension aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.	

Les étudiants profiteront de ce chapitre pour très opportunément réviser :

1. Les limites et équivalents usuels ;
2. Les primitives et dérivées des fonctions usuelles.
3. Le chapitre de sup d'intégration et en particulier :
   (a) Le théorème fondamental de l'analyse ;
   (b) Les sommes de Riemann ;
   (c) Les différentes techniques de calcul de primitive.