Lycée Kléber *PC * année 2016-2017*

Colle 02 du 10 octobre 2016 au 6 novembre 2016

Réduction des endomorphismes

0.0.1 B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Après avoir introduit le vocabulaire des éléments propres en dimension quelconque, cette partie s'intéresse de manière plus approfondie au cas de la dimension finie, et à la question de diagonalisabilité d'une matrice carrée.

L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires, dont la résolution repose sur des outils similaires.

La notion de polynôme annulateur est hors programme. L'étude des classes de similitude est hors programme.

Contenus	Capacit?s & commentaires
a) Éléments propres	
Droite stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E.	
Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.	Les étudiants doivent savoir que si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice carrée.	Notation $\mathrm{Sp}(u)$. La notion de valeur spectrale est hors programme.
Les sous-espaces propres sont en somme directe.	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.	Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.	Le théorème de Cayley-Hamilton est hors programme.
Expressions du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé.	
Multiplicité d'une valeur propre.	
Majoration de la dimension d'un sous-espace propre.	
b) Diagonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.	
Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.	
Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.	Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace .	Exemple des projecteurs et des symétries.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique.	
Un endomorphisme admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.	Interprétation matricielle de ces résultats.
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Application à la résolution des récurrences linéaires d'ordre p à coefficients constants lorsque l'équation caractéristique admet p racines distinctes.	Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement une relation de récurrence linéaire.
c) Trigonalisation en dimension finie	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.	
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$. En particulier, toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.	Démonstration non exigible. Interprétation matricielle de ce résultat. La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.
Application à la résolution des récurrences linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.	

Les étudiants profiteront de ce chapitre pour très opportunément réviser :

1. Le chapitre 1 sur les compléments d'algèbre linéaire ;
2. Les chapitres de sup d'algèbre linéaire :