COLLE 01 DU 26 SEPTEMBRE 2015 AU 9 OCTOBRE 2015

Compléments d'algèbre linéaire, séries numériques

0.1 Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

0.1.1 A - Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :
- *consolider les acquis de la classe de première année ;*
- *étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace ;*
- *passer du registre géométrique au registre matriciel et inversement.*

Le programme valorise les interprétations géométriques et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACIT?S & COMMENTAIRES
a) Produit et somme d'espaces vectoriels	
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels ; sous-espaces supplémentaires. Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$. Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors : $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations. Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v.	Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
c) Déterminants	
Exemples de déterminants.	Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde. ⇆ I : calcul du déterminant d'une matrice.
d) Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	La notion de matrices équivalentes est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Trace d'une matrice carrée. Linéarité ; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	

0.1.2 A - Séries numériques

Cette partie consolide et élargit les acquis de première année sur les séries, notamment la convergence absolue, en vue de l'étude des probabilités discrètes et des séries de fonctions.

La semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacit?s & commentaires
a) Compléments sur les séries à valeurs réelles	
Théorème de comparaison entre une série et une intégrale : si f est une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, positive et décroissante alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.	
Formule de Stirling : équivalent de $n!$.	Démonstration non exigible.
Règle de d'Alembert.	
Théorème spécial des séries alternées, majoration et signe du reste.	La transformation d'Abel est hors programme.
b) Produit de Cauchy de deux séries	
Le produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes est la série $\sum w_n$ avec : $$w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_p.$$	
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum w_n$ l'est aussi et on a : $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big).$$	Démonstration non exigible.

Les étudiants sauront redémontrer les différents résultats du cours. Il est opportun de revoir :

1. La fiche sur les limites et équivalents usuels ;
2. Le chapitre de sup sur les suites ;
3. Le chapitre de sup sur les séries.
4. Le chapitre de sup sur les développements limités.

Quelques documents pour l'année :

- Le colloscope
- Les groupes de colle
- Le trombinoscope